1 Grundlagen der Mathematik

- extra light
- *extra light italic*
- light
- *light italic*
- normal
- *italic*
- **semibold**
- *semibold italic*
- **bold**
- ***bold italic***
- **black**
- *black italic*

а Cyrillic
α Greek

Keine Kapitälchen?
effect efficient filled flip : EFFECT EFFICIENT FILLED FLIP

1.1 Potenzrechnung

1.1.1 Potenzgesetze

Für alle positiven reellen Zahlen a, b und alle reellen Zahlen x, y gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} &a^x a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \\ &(ab)^x = a^x b^x, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \end{aligned}}$$

Wichtige Spezialfälle für $n = 1, 2, ...$ gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a \cdot a \cdot a \\ a^n = a \cdot a \cdot ... \cdot a \quad (n \text{ Faktoren}) \\ a^{-1} = \dfrac{1}{a}, \quad a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}, ..., \quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \\ a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \quad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \end{array}}$$

1.2 Wurzelgesetze

1.2.1 n-te Wurzeln

Gegeben sei die positive reele Zahl a. Dann ist $a = a^{1/n}$ die eindeutige Lösung der Gleichung

$$\boxed{x^n = a, x \geq 0}$$

In der Literatur wird $a^{1/n}$ mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet (n-te Wurzel). Bei den Umformungen von Gleichungen empfiehlt es sich jedoch, stets mit $a^{1/n}$ zu rechnen, weil man dann die allgemeinen Potenzgesetze anwenden kann und sich nicht noch zusätzlich die "Wurzelgesetze" zu merken hat.

Beispiel: Aus $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}}$ folgt das Wurzelgesetz $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$.

1.3 Logarithmus

Es sei a eine fest gegebene, positive, reelle Zahl mit $a \neq 1$. Für jede vorgegebene positive reelle Zahl y besitzt dann die Gleichung

$$\boxed{y = a^x}$$

eine eindeutige reelle Lösung x, die mit

$$\boxed{x = \log_a y}$$

und Logarithmus von y zur Basis a bezeichnet wird.

1.3.1 Logarithmengesetze

Für alle reellen Zahlen c, d und alle reellen Zahlen x gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a(cd) = \log_a c + \log_a d, \quad \log_a = \left(\dfrac{c}{d}\right) = \log_a c - \log_a d, \\ \log_a c^x = x \cdot \log_a c, \quad \log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0 \end{array}}$$

Wegen $\log_a(cd) = \log_a c + \log_a d$ besitzt der Logarithmus die fundamentale Eigenschaft, dass man die Multiplikation zweier Zahlen auf die Addition ihrer Logarithmen zurückführen kann.